Тема 13.
Окружность.

Радиус – это отрезок, соединяющий центр окружности с точкой, лежащей на окружности.

Хорда – это отрезок, соединяющий две точки окружности.

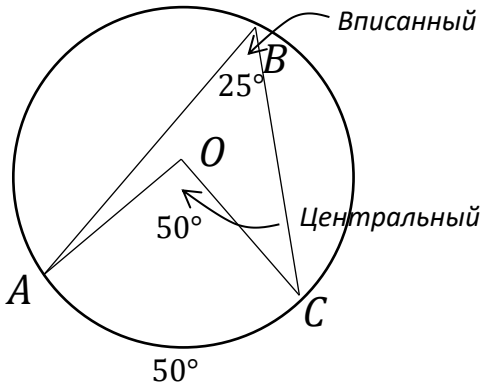
Диаметр – это хорда, проходящая через центр. Диаметр равен двум радиусам.

Вписанные и центральные углы.

В окружности встречаются два вида углов: вписанный (угол ABC) и центральный (угол AOC).

Если эти углы опираются на одну дугу (как на рисунке), то их градусная мера различается ровно в 2 раза: центральный угол будет больше.

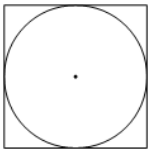
А сама дуга (дуга AC), кстати, равна центральному углу.



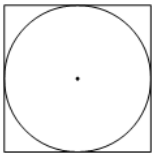
I. Окружность и квадрат.

1) Если окружность вписана в квадрат, то ее диаметр равен стороне квадрата.
2) Если окружность описана вокруг квадрата, то ее диаметр равен диагонали квадрата.

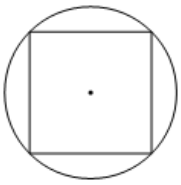
1. Сторона квадрата равна 16. Найдите радиус окружности, вписанной в этот квадрат.



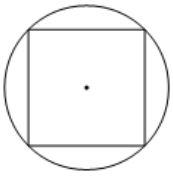
2. Найдите площадь квадрата, описанного около окружности радиуса 40.



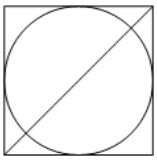
3. Сторона квадрата равна $4\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого квадрата.



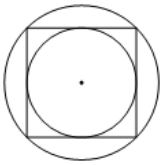
4. Радиус окружности, описанной около квадрата, равен 16√2. Найдите длину стороны этого квадрата.



5. Радиус вписанной в квадрат окружности равен 14√2. Найдите диагональ этого квадрата.



6. Радиус вписанной в квадрат окружности равен 2√2. Найдите радиус окружности, описанной около этого квадрата.



II. Окружность и треугольник.

1) Радиус вписанной в треугольник окружности: $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

2) Радиус описанной вокруг треугольника окружности: $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

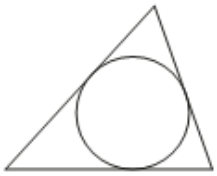
3) Площадь треугольника: $S = pr$, где p – полупериметр, r – радиус вписанной окружности.

4) Расширенная теорема синусов: $\frac{a}{sin\alpha} = 2R$, где a – сторона треугольника, α – угол, лежащий напротив этой стороны, R - радиус описанной окружности.

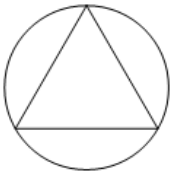
5) В равностороннем треугольнике радиус вписанной в этот треугольник окружности равен половине радиуса описанной вокруг него окружности.

6) Если вписанные угол опирается на диаметр, то он прямой.

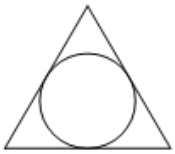
1. Периметр треугольника равен 50, одна из сторон равна 20, а радиус вписанной в него окружности равен 4. Найдите площадь этого треугольника.



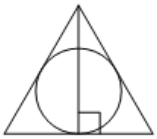
2. Сторона равностороннего треугольника равна 2√3. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



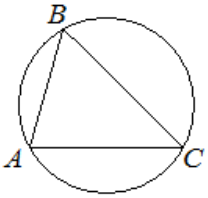
3. Сторона равностороннего треугольника равна $14\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.



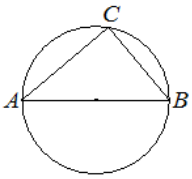
4. Радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, равен 8. Найдите высоту этого треугольника.



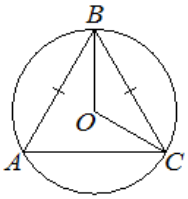
5. В треугольнике ABC угол C равен 45°, $AB=6\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



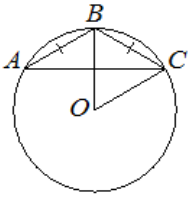
6. Центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на стороне AB. Радиус окружности равен 20. Найдите BC, если AC=32.



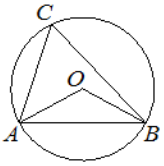
7. Окружность с центром в точке O описана около равнобедренного треугольника ABC, в котором AB=BC и ∠ABC=57°. Найдите угол BOC. Ответ дайте в градусах.



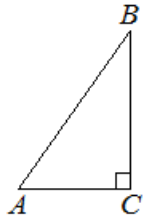
8. Окружность с центром в точке O описана около равнобедренного треугольника ABC, в котором AB=BC и ∠ABC=123°. Найдите угол BOC. Ответ дайте в градусах.



9. Треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O. Точки O и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB. Найдите угол ACB, если угол AOB равен 113°. Ответ дайте в градусах.



10. В треугольнике ABC известно, что AC=8, BC=15, угол C равен 90°. Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности.

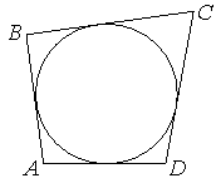


III. Окружность и четырехугольник.

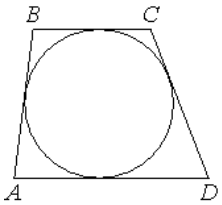
1) Если в четырехугольник вписана окружность, то суммы его противоположных сторон равны.

2) Если вокруг четырехугольника описана окружность, то сумма его противоположных углов равна 180 градусам.

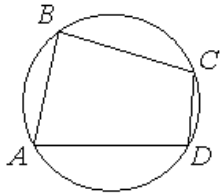
1. Четырёхугольник ABCD описан около окружности, AB=7, BC=10, CD=14. Найдите AD.



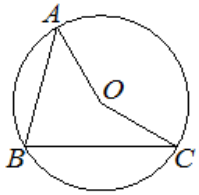
2. Трапеция ABCD с основаниями AD и BC описана около окружности, AB=11, BC=6, CD=9. Найдите AD.



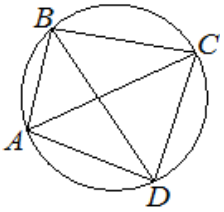
3. Угол A четырёхугольника ABCD, вписанного в окружность, равен 82°. Найдите угол C этого четырёхугольника. Ответ дайте в градусах.



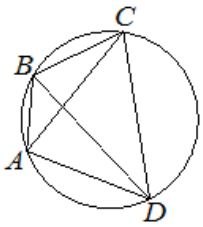
4. Точка O — центр окружности, на которой лежат точки A, B и C. Известно, что ∠ABC=75° и ∠OAB=43°. Найдите угол BCO. Ответ дайте в градусах.



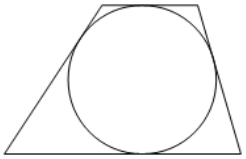
5. Четырёхугольник ABCD вписан в окружность. Угол ABD равен 39°, угол CAD равен 55°. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.



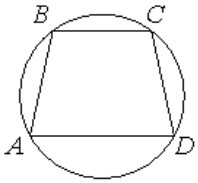
6. Четырёхугольник ABCD вписан в окружность. Угол ABC равен 134°, угол CAD равен 81°. Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах.



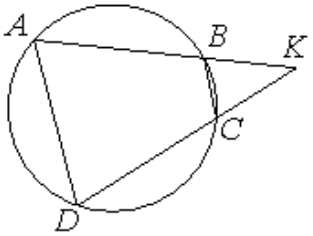
7. Радиус окружности, вписанной в трапецию, равен 34. Найдите высоту этой трапеции.



8. Угол A трапеции ABCD с основаниями AD и BC, вписанной в окружность, равен 81°. Найдите угол C этой трапеции. Ответ дайте в градусах.



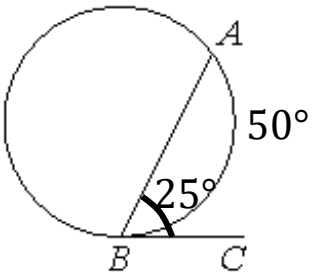
9. Четырёхугольник ABCD вписан в окружность. Прямые AB и CD пересекаются в точке K, BK=7, DK=14, BC=10. Найдите AD.



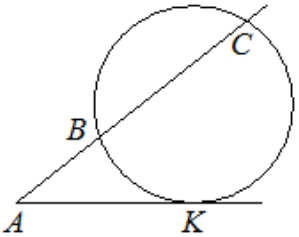
IV. Окружность и касательная.

1) **Касательная** – это прямая, имеющая с окружностью одну общую точку. **Секущая** – это прямая, имеющая с окружностью две общие точки.

2) Угол между касательной и хордой равен половине дуги. заключенной между ними.



3) Квадрат отрезка касательной равен произведению всей секущей, проведенной из этой же точки к окружности, на ее внешнюю часть.

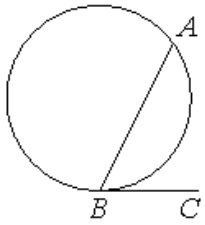


$$AK^2 = AB \cdot AC$$

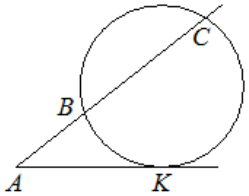
или

$$AK = \sqrt{AB \cdot AC}$$

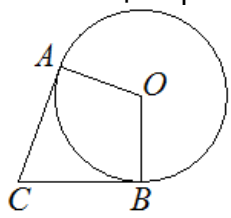
1. На окружности отмечены точки A и B так, что меньшая дуга AB равна 92°. Прямая BC касается окружности в точке B так, что угол ABC острый. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.



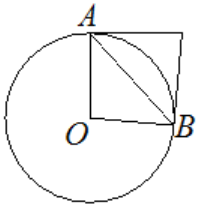
2. Через точку A, лежащую вне окружности, проведены две прямые. Одна прямая касается окружности в точке K. Другая прямая пересекает окружность в точках B и C, причём AB=4, AC=64. Найдите AK.



3. В угол C величиной 83° вписана окружность, которая касается сторон угла в точках A и B, точка O — центр окружности. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.



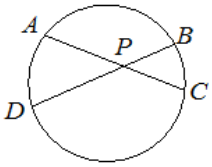
4. Касательные в точках A и B к окружности с центром в точке O пересекаются под углом 72°. Найдите угол ABO. Ответ дайте в градусах.



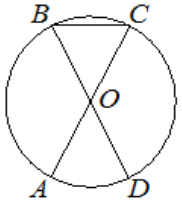
IV. Окружность и хорды.

1) Произведения отрезков пересекающихся хорд равны.

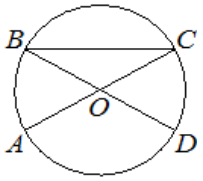
1. Хорды AC и BD окружности пересекаются в точке P, BP=15, CP=6, DP=10. Найдите AP.



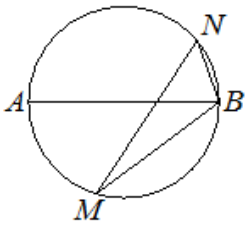
2. Отрезки AC и BD — диаметры окружности с центром в точке O. Угол ACB равен 74°. Найдите угол AOD. Ответ дайте в градусах.



3. В окружности с центром в точке O отрезки AC и BD — диаметры. Угол AOD равен 124°. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.



4. На окружности по разные стороны от диаметра AB взяты точки M и N. Известно, что ∠NBA=69°. Найдите угол NMB. Ответ дайте в градусах.

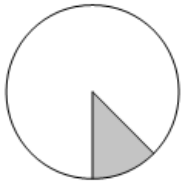


V. Другое.

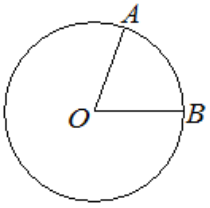
1) Площадь круга: $S = \pi R^2$.

2) Площадь сектора: $S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha$, где α – центральный угол сектора.

1. Площадь круга равна 90. Найдите площадь сектора этого круга, центральный угол которого равен 60°.



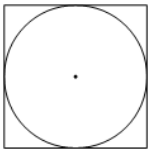
2. На окружности с центром в точке O отмечены точки A и B так, что ∠AOB=66°. Длина меньшей дуги AB равна 99. Найдите длину большей дуги AB.



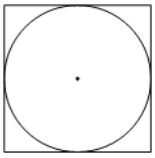
Домашнее задание.

1. Сторона квадрата равна 36. Найдите радиус окружности, вписанной в этот квадрат.

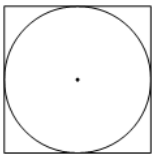
2. Сторона квадрата равна 22. Найдите радиус окружности, вписанной в этот квадрат.



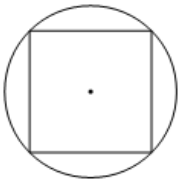
3. Найдите площадь квадрата, описанного около окружности радиуса 15.



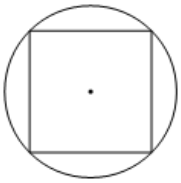
4. Найдите площадь квадрата, описанного около окружности радиуса 21.



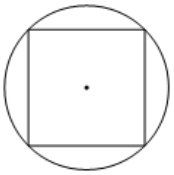
5. Сторона квадрата равна 14√2. Найдите радиус окружности, описанной около этого квадрата.



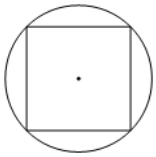
6. Сторона квадрата равна 18√2. Найдите радиус окружности, описанной около этого квадрата.



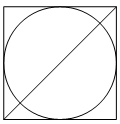
7. Радиус окружности, описанной около квадрата, равен 26√2. Найдите длину стороны этого квадрата.



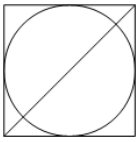
8. Радиус окружности, описанной около квадрата, равен 32√2. Найдите длину стороны этого квадрата.



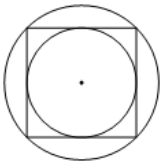
9. Радиус вписанной в квадрат окружности равен 22√2. Найдите диагональ этого квадрата.



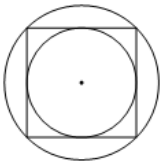
10. Радиус вписанной в квадрат окружности равен 2√2. Найдите диагональ этого квадрата.



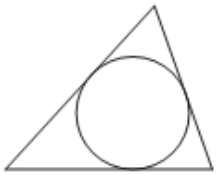
11. Радиус вписанной в квадрат окружности равен $26\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого квадрата.



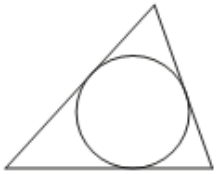
12. Радиус вписанной в квадрат окружности равен $10\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого квадрата.



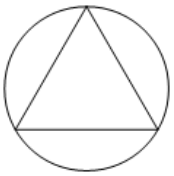
13. Периметр треугольника равен 60, одна из сторон равна 12, а радиус вписанной в него окружности равен 3. Найдите площадь этого треугольника.



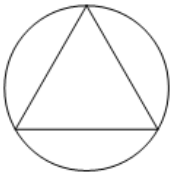
14. Периметр треугольника равен 140, одна из сторон равна 56, а радиус вписанной в него окружности равен 9. Найдите площадь этого треугольника.



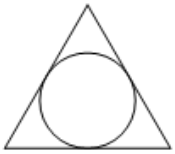
15. Сторона равностороннего треугольника равна $16\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



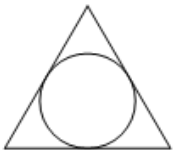
16. Сторона равностороннего треугольника равна $19\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



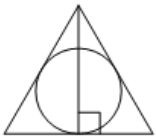
17. Сторона равностороннего треугольника равна $24\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.



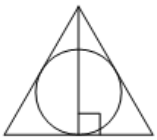
18. Сторона равностороннего треугольника равна $38\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.



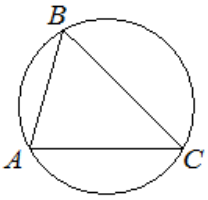
19. Радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, равен 12. Найдите высоту этого треугольника.



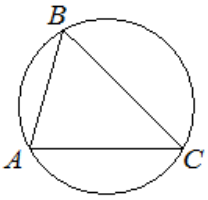
20. Радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, равен 21. Найдите высоту этого треугольника.



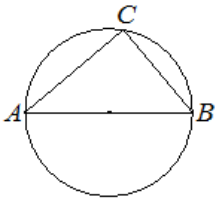
21. В треугольнике ABC угол C равен 60°, $AB=12\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



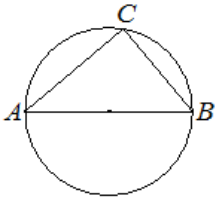
22. В треугольнике ABC угол C равен 135°, $AB=14\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



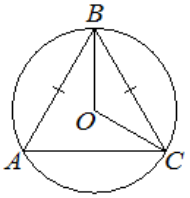
23. Центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на стороне AB. Радиус окружности равен 13. Найдите BC, если AC=24.



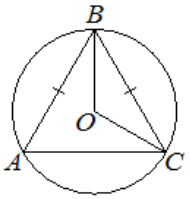
24. Центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на стороне AB. Радиус окружности равен 14,5. Найдите BC, если AC=21.



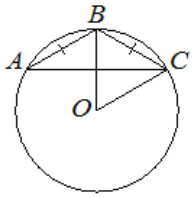
25. Окружность с центром в точке O описана около равнобедренного треугольника ABC, в котором AB=BC и ∠ABC=16°. Найдите угол BOC. Ответ дайте в градусах.



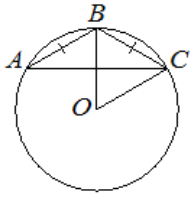
26. Окружность с центром в точке O описана около равнобедренного треугольника ABC, в котором AB=BC и ∠ABC=25°. Найдите угол BOC. Ответ дайте в градусах.



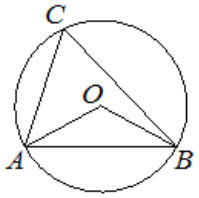
27. Окружность с центром в точке O описана около равнобедренного треугольника ABC, в котором AB=BC и ∠ABC=119°. Найдите угол BOC. Ответ дайте в градусах.



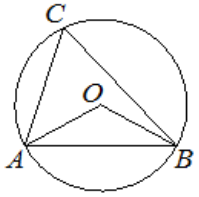
28. Окружность с центром в точке O описана около равнобедренного треугольника ABC, в котором AB=BC и ∠ABC=104°. Найдите угол BOC. Ответ дайте в градусах.



29. Треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O. Точки O и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB. Найдите угол ACB, если угол AOB равен 67°. Ответ дайте в градусах.



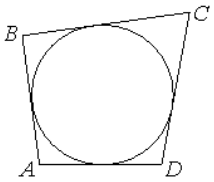
30. Треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O. Точки O и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB. Найдите угол ACB, если угол AOB равен 173°. Ответ дайте в градусах.



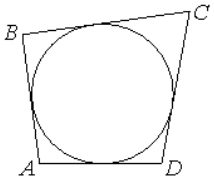
31. В треугольнике ABC известно, что AC=10, BC=24, угол C равен 90°. Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности.

32. В треугольнике ABC известно, что AC=16, BC=12, угол C равен 90°. Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности.

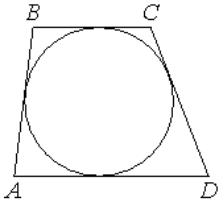
33. Четырёхугольник ABCD описан около окружности, AB=12, BC=6, CD=13. Найдите AD.



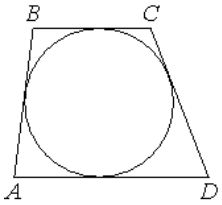
34. Четырёхугольник ABCD описан около окружности, AB=10, BC=14, CD=22. Найдите AD.



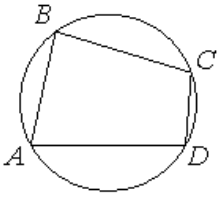
35. Трапеция ABCD с основаниями AD и BC описана около окружности, AB=15, BC=9, CD=16. Найдите AD.



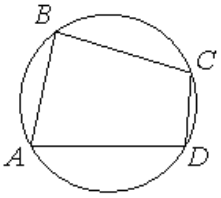
36. Трапеция ABCD с основаниями AD и BC описана около окружности, AB=8, BC=4, CD=9. Найдите AD.



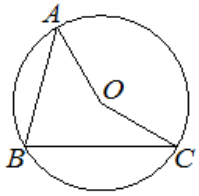
37. Угол A четырёхугольника ABCD, вписанного в окружность, равен 71°. Найдите угол C этого четырёхугольника. Ответ дайте в градусах.



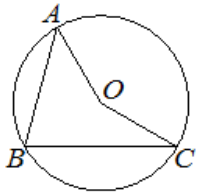
38. Угол A четырёхугольника ABCD, вписанного в окружность, равен 32°. Найдите угол C этого четырёхугольника. Ответ дайте в градусах.



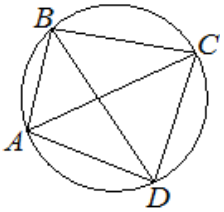
39. Точка O — центр окружности, на которой лежат точки A, B и C. Известно, что ∠ABC=44° и ∠OAB=13°. Найдите угол BCO. Ответ дайте в градусах.



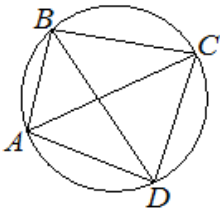
40. Точка O — центр окружности, на которой лежат точки A, B и C. Известно, что ∠ABC=63° и ∠OAB=21°. Найдите угол BCO. Ответ дайте в градусах.



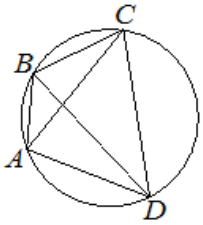
41. Четырёхугольник ABCD вписан в окружность. Угол ABD равен 52°, угол CAD равен 42°. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.



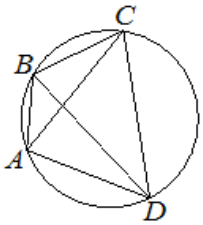
42. Четырёхугольник ABCD вписан в окружность. Угол ABD равен 86°, угол CAD равен 16°. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.



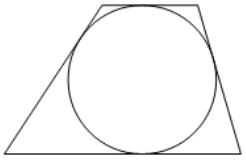
43. Четырёхугольник ABCD вписан в окружность. Угол ABC равен 38°, угол CAD равен 33°. Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах.



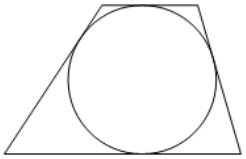
44. Четырёхугольник ABCD вписан в окружность. Угол ABC равен 120°, угол CAD равен 74°. Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах.



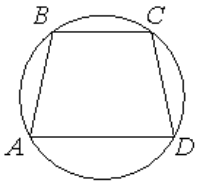
45. Радиус окружности, вписанной в трапецию, равен 26. Найдите высоту этой трапеции.



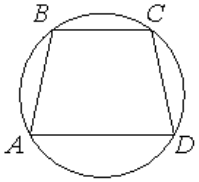
46. Радиус окружности, вписанной в трапецию, равен 65. Найдите высоту этой трапеции.



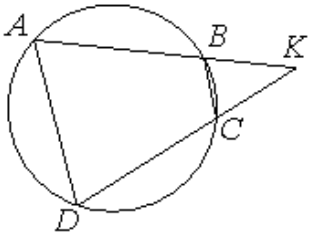
47. Угол A трапеции ABCD с основаниями AD и BC, вписанной в окружность, равен 64°. Найдите угол C этой трапеции. Ответ дайте в градусах.



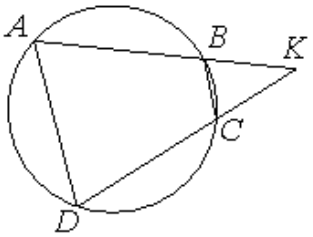
48. Угол A трапеции ABCD с основаниями AD и BC, вписанной в окружность, равен 56°. Найдите угол C этой трапеции. Ответ дайте в градусах.



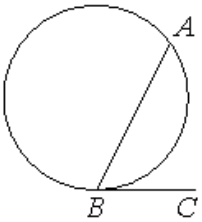
49. Четырёхугольник ABCD вписан в окружность. Прямые AB и CD пересекаются в точке K, BK=9, DK=18, BC=16. Найдите AD.



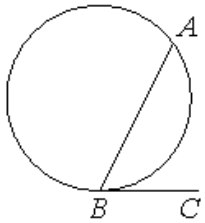
50. Четырёхугольник ABCD вписан в окружность. Прямые AB и CD пересекаются в точке K, BK=6, DK=10, BC=12. Найдите AD.



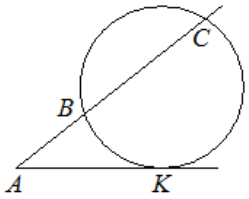
51. На окружности отмечены точки A и B так, что меньшая дуга AB равна 66°. Прямая BC касается окружности в точке B так, что угол ABC острый. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.



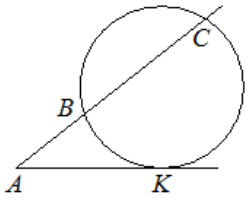
52. На окружности отмечены точки A и B так, что меньшая дуга AB равна 73°. Прямая BC касается окружности в точке B так, что угол ABC острый. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.



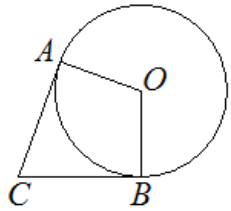
53. Через точку A, лежащую вне окружности, проведены две прямые. Одна прямая касается окружности в точке K. Другая прямая пересекает окружность в точках B и C, причём AB=6, AC=54. Найдите AK.



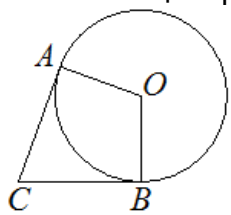
54. Через точку A, лежащую вне окружности, проведены две прямые. Одна прямая касается окружности в точке K. Другая прямая пересекает окружность в точках B и C, причём AB=2, AC=18. Найдите AK.



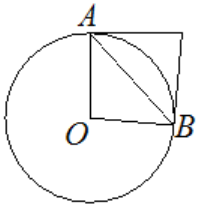
55. В угол C величиной 52° вписана окружность, которая касается сторон угла в точках A и B, точка O — центр окружности. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.



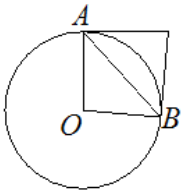
56. В угол C величиной 16° вписана окружность, которая касается сторон угла в точках A и B, точка O — центр окружности. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.



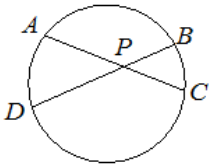
57. Касательные в точках A и B к окружности с центром в точке O пересекаются под углом 86°. Найдите угол ABO. Ответ дайте в градусах.



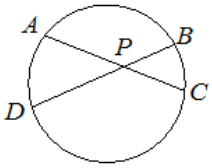
58. Касательные в точках A и B к окружности с центром в точке O пересекаются под углом 68°. Найдите угол ABO. Ответ дайте в градусах.



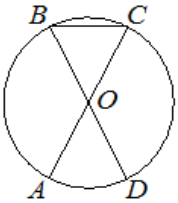
59. Хорды AC и BD окружности пересекаются в точке P, BP=6, CP=8, DP=12. Найдите AP.



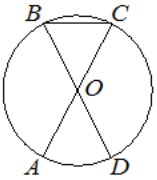
60. Хорды AC и BD окружности пересекаются в точке P, BP=9, CP=15, DP=20. Найдите AP.



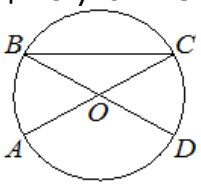
61. Отрезки AC и BD — диаметры окружности с центром в точке O. Угол ACB равен 23°. Найдите угол AOD. Ответ дайте в градусах.



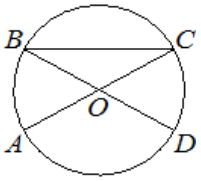
62. Отрезки AC и BD — диаметры окружности с центром в точке O. Угол ACB равен 59°. Найдите угол AOD. Ответ дайте в градусах.



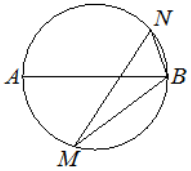
63. В окружности с центром в точке O отрезки AC и BD — диаметры. Угол AOD равен 88°. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.



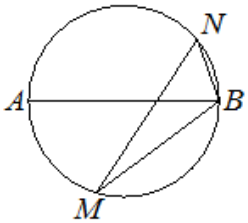
64. В окружности с центром в точке O отрезки AC и BD — диаметры. Угол AOD равен 102°. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.



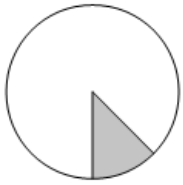
65. На окружности по разные стороны от диаметра AB взяты точки M и N. Известно, что ∠NBA=43°. Найдите угол NMB. Ответ дайте в градусах.



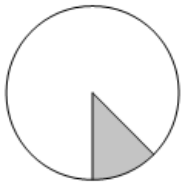
66. На окружности по разные стороны от диаметра AB взяты точки M и N. Известно, что ∠NBA=18°. Найдите угол NMB. Ответ дайте в градусах.



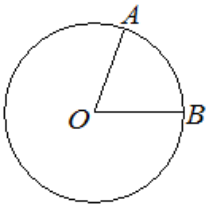
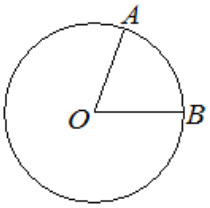
67. Площадь круга равна 112. Найдите площадь сектора этого круга, центральный угол которого равен 45°.



68. Площадь круга равна 69. Найдите площадь сектора этого круга, центральный угол которого равен 120°.



69. На окружности с центром в точке O отмечены точки A и B так, что ∠AOB=140°. Длина меньшей дуги AB равна 98. Найдите длину большей дуги AB.



70. На окружности с центром в точке O отмечены точки A и B так, что ∠AOB=40°. Длина меньшей дуги AB равна 50. Найдите длину большей дуги AB.