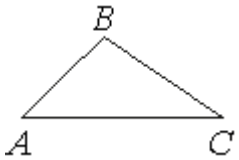
Тема 11.
Треугольники.

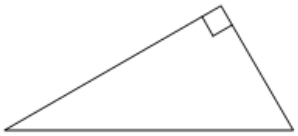
I. Углы в треугольнике.

1) Сумма углов в треугольнике равна 180 градусам.
2) Сумма острых углов в прямоугольном треугольнике равна 90 градусам.
3) В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.
4) Сумма смежных углов равна 180 градусам.
5) Биссектриса треугольника делит угол пополам.

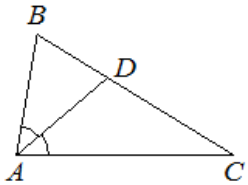
1. В треугольнике два угла равны $57°$ и $86°$. Найдите его третий угол. Ответ дайте в градусах.



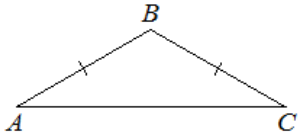
2. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен $26°$. Найдите его другой острый угол. Ответ дайте в градусах.



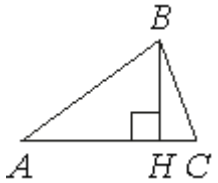
3. В треугольнике ABC известно, что $\angle BAC = 82°, AD$ — биссектриса. Найдите угол BAD. Ответ дайте в градусах.



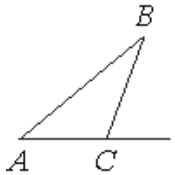
4. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC, \angle ABC = 108°$. Найдите угол BCA. Ответ дайте в градусах.



5. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH, $\angle BAC = 37°$. Найдите угол ABH. Ответ дайте в градусах.



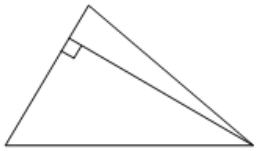
6. В треугольнике ABC угол C равен $133°$. Найдите внешний угол при вершине C. Ответ дайте в градусах.



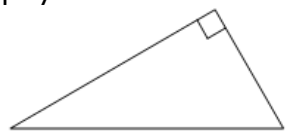
II. Площадь треугольника.

1) через основание a и высоту h, проведенную к этому основанию: $S = \frac{1}{2}ah$;
2) через две стороны a и b и угол α между ними: $S = \frac{1}{2}absin\alpha$.
3) Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.

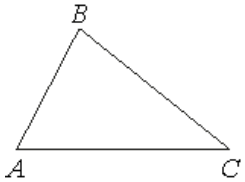
7. Сторона треугольника равна 14, а высота, проведённая к этой стороне, равна 31. Найдите площадь этого треугольника.



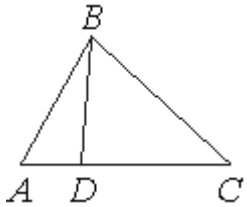
8. Два катета прямоугольного треугольника равны 6 и 7. Найдите площадь этого треугольника.



9. В треугольнике ABC известно, что $AB = 6$, $BC = 10$, $sin\angle ABC = \frac{1}{3}$. Найдите площадь треугольника ABC.

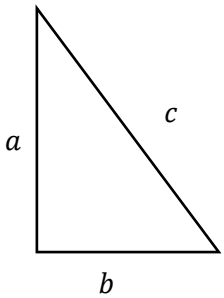


10. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D так, что $AD = 3$, $DC = 7$. Площадь треугольника ABC равна 20. Найдите площадь треугольника BCD.



III. Теорема Пифагора.

1)

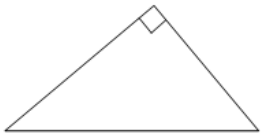


a, b – катеты
c – гипотенуза

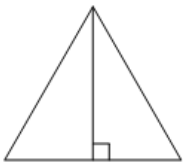
$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$
$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

2) В равностороннем треугольнике все стороны равны.
3) В равностороннем треугольнике медиана, биссектриса и высота взаимозаменяемы.

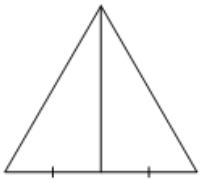
11. Катеты прямоугольного треугольника равны 20 и 21. Найдите гипотенузу этого треугольника.



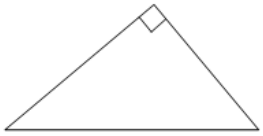
12. Сторона равностороннего треугольника равна $14\sqrt{3}$. Найдите высоту этого треугольника.



13. Медиана равностороннего треугольника равна $13\sqrt{3}$. Найдите сторону этого треугольника.

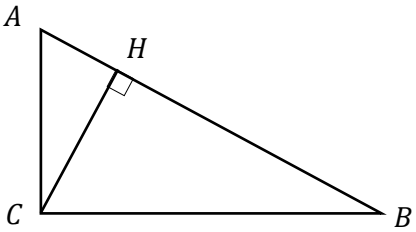


14. Катеты прямоугольного треугольника равны 15 и 20. Найдите высоту, проведённую к гипотенузе.



IV. Медианы, высоты, средняя линия.

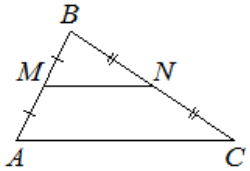
1) Средняя линия треугольника параллельна основанию и равна его половине.
2) Медиана делит сторону треугольника пополам.
3) Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна ее половине.
4) Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2 к 1, начинаю от вершины.
5) Квадрат высоты, проведенной к гипотенузе, равен произведению отрезков гипотенузы.



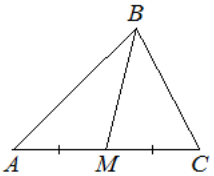
$$CH^2 = AH \cdot BH$$

$$CH = \sqrt{AH \cdot BH}$$

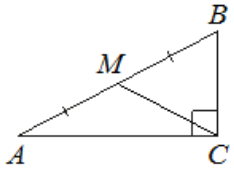
15. Точки M и N являются серединами сторон AB и BC треугольника ABC, сторона AB равна 21, сторона BC равна 22, сторона AC равна 28. Найдите MN.



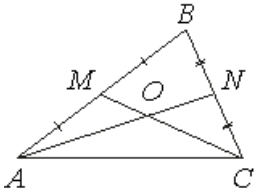
16. В треугольнике ABC известно, что $AC = 14, BM$ — медиана, $BM = 10$. Найдите AM.



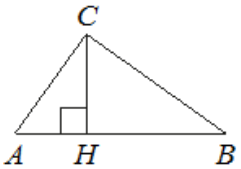
17. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, M — середина стороны AB, $AB = 20$, $BC = 10$. Найдите CM.



18. Точки M и N являются серединами сторон AB и BC треугольника ABC соответственно. Отрезки AN и CM пересекаются в точке O, $AN = 12$, $CM = 18$. Найдите AO.



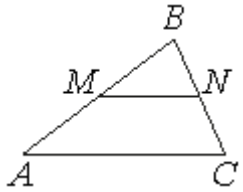
19. На гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC опущена высота CH, $AH = 2$, $BH = 18$. Найдите CH.



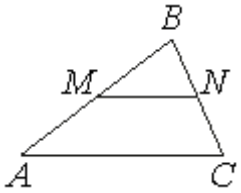
V. Подобие треугольников.

1) У подобных треугольников стороны пропорциональны.
2) Отношение площадей равно квадрату коэффициента подобия.

20. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно, $AB = 9$, $AC = 18$, $MN = 8$. Найдите AM.



21. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно, $AC = 18$, $MN = 8$. Площадь треугольника ABC равна 81. Найдите площадь треугольника MBN.



VI. Основное тригонометрическое тождество.

$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

$sin\alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha}$

$cos\alpha = \sqrt{1 - sin^2\alpha}$

22. Синус острого угла A треугольника ABC равен $\frac{\sqrt{21}}{5}$. Найдите $cosA$.

23. Косинус острого угла A треугольника ABC равен $\frac{\sqrt{91}}{10}$. Найдите $sinA$.

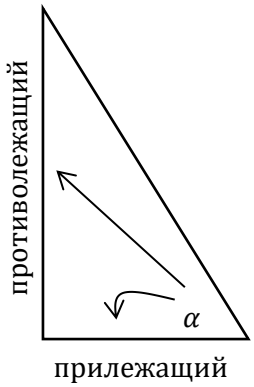
VII. Синус, косинус, тангенс, котангенс

$$\text{синус} = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

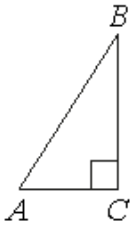
$$\text{косинус} = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

$$\text{тангенс} = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{прилежащий катет}}$$

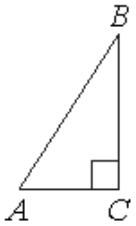
$$\text{котангенс} = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{противолежащий катет}}$$



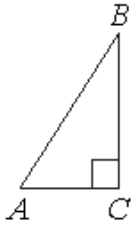
24. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AC = 6$, $AB = 10$. Найдите $sinB$.



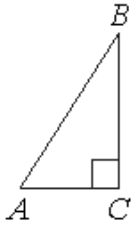
25. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $BC = 8$, $AB = 10$. Найдите $cosB$.



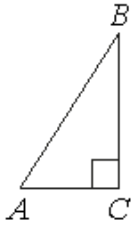
26. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $BC = 5$, $AC = 2$. Найдите tgB.



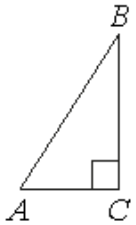
27. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $sinB = \frac{4}{15}$, $AB = 45$. Найдите AC.



28. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $cosB = \frac{5}{6}$, $AB = 18$. Найдите BC.



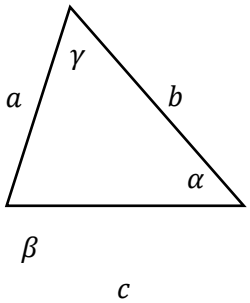
29. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $tgB = \frac{3}{4}$, $BC = 12$. Найдите AC.



VII. Теорема синусов и теорема косинусов.

1) Теорема синусов применяется, когда есть 2 угла и 2 стороны:

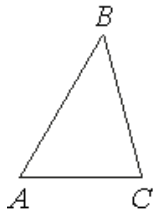
$$\frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma}$$



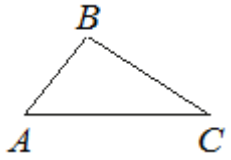
2) Теорема косинусов применяется, когда есть 3 стороны и угол:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\gamma$$

30. В треугольнике ABC угол A равен $45°$, угол B равен $30°$, $BC = 6\sqrt{2}$. Найдите AC.

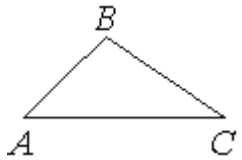


31. В треугольнике ABC известно, что $AB = 5$, $BC = 7$, $AC = 9$. Найдите $cos\angle ABC$.

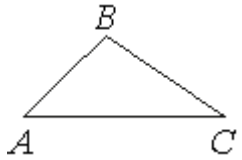


Домашнее задание.

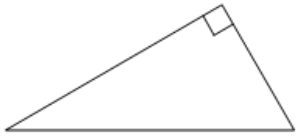
1. В треугольнике два угла равны $102°$ и $54°$. Найдите его третий угол. Ответ дайте в градусах.



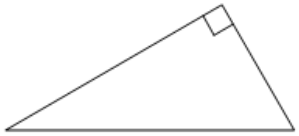
2. В треугольнике два угла равны $33°$ и $92°$. Найдите его третий угол. Ответ дайте в градусах.



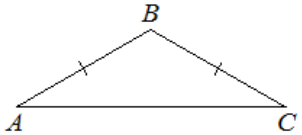
3. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен $43°$. Найдите его другой острый угол. Ответ дайте в градусах.



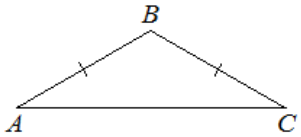
4. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен $81°$. Найдите его другой острый угол. Ответ дайте в градусах.



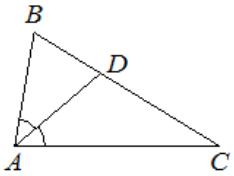
5. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC, \angle ABC = 144°$. Найдите угол BCA. Ответ дайте в градусах.



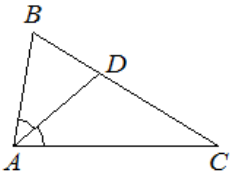
6. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC, \angle ABC = 126°$. Найдите угол BCA. Ответ дайте в градусах.



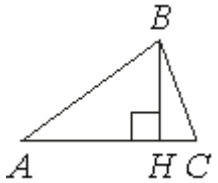
7. В треугольнике ABC известно, что $\angle BAC = 134°, AD$ — биссектриса. Найдите угол BAD. Ответ дайте в градусах.



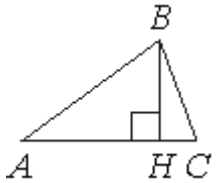
8. В треугольнике ABC известно, что $\angle BAC = 68°, AD$ — биссектриса. Найдите угол BAD. Ответ дайте в градусах.



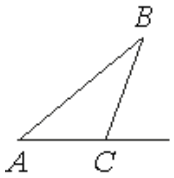
9. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH, $\angle BAC = 55°$. Найдите угол ABH. Ответ дайте в градусах.



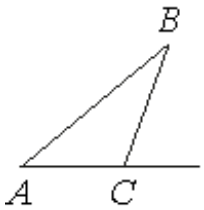
10. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH, $\angle BAC = 28°$. Найдите угол ABH. Ответ дайте в градусах.



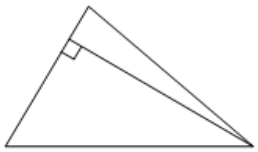
11. В треугольнике ABC угол C равен $142°$. Найдите внешний угол при вершине C. Ответ дайте в градусах.



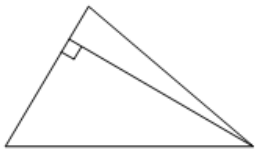
12. В треугольнике ABC угол C равен $97°$. Найдите внешний угол при вершине C. Ответ дайте в градусах.



13. Сторона треугольника равна 12, а высота, проведённая к этой стороне, равна 15. Найдите площадь этого треугольника.

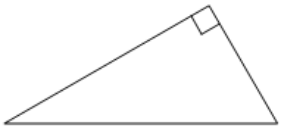


14. Сторона треугольника равна 18, а высота, проведённая к этой стороне, равна 4. Найдите площадь этого треугольника.

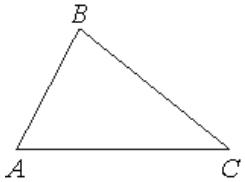


15. Два катета прямоугольного треугольника равны 5 и 8. Найдите площадь этого треугольника.

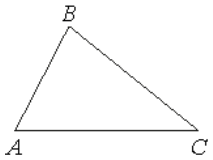
16. Два катета прямоугольного треугольника равны 11 и 4. Найдите площадь этого треугольника.



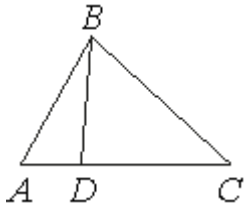
17. В треугольнике ABC известно, что $AB = 16$, $BC = 25$, $sin\angle ABC = \frac{3}{10}$. Найдите площадь треугольника ABC.



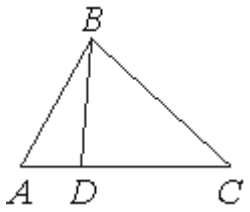
18. В треугольнике ABC известно, что $AB = 20$, $BC = 7$, $sin\angle ABC = \frac{2}{5}$. Найдите площадь треугольника ABC.



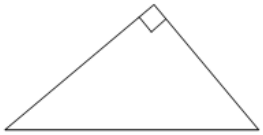
19. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D так, что $AD = 5$, $DC = 9$. Площадь треугольника ABC равна 56. Найдите площадь треугольника BCD.



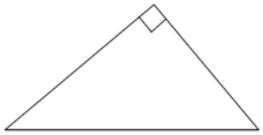
20. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D так, что $AD = 6$, $DC = 8$. Площадь треугольника ABC равна 42. Найдите площадь треугольника BCD.



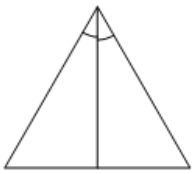
21. Катеты прямоугольного треугольника равны 7 и 24. Найдите гипотенузу этого треугольника.



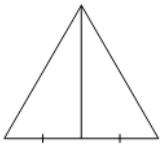
22. Катеты прямоугольного треугольника равны 60 и 80. Найдите гипотенузу этого треугольника.



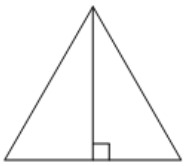
23. Сторона равностороннего треугольника равна $18\sqrt{3}$. Найдите биссектрису этого треугольника.



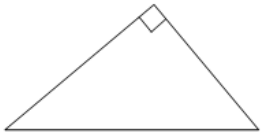
24. Сторона равностороннего треугольника равна $10\sqrt{3}$. Найдите медиану этого треугольника.



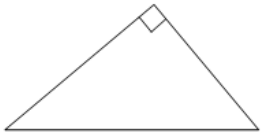
25. Высота равностороннего треугольника равна $20\sqrt{3}$. Найдите сторону этого треугольника.



26. Катеты прямоугольного треугольника равны 21 и 72. Найдите высоту, проведённую к гипотенузе.



27. Катеты прямоугольного треугольника равны 10 и 24. Найдите высоту, проведённую к гипотенузе. Ответ округлите до десятых.



Повторение.

1) Найдите значение выражения:

1) $\frac{(a^5)^3 \cdot a^6}{a^{22}}$ при $a = 2$; 2) $\frac{\sqrt{4a^{11}} \cdot \sqrt{9b^4}}{\sqrt{a^7 b^4}}$ при $a = 7$ и $b = 9$; 3) $\sqrt{\frac{1}{25} x^4 y^8}$ при $x = 5$ и $y = 2$;

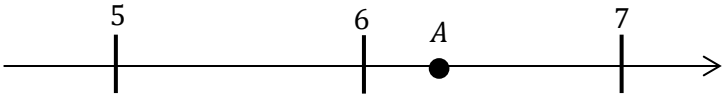
4) $(a^4)^{-3} : a^{-17}$ при $a = 2$; 5) $\sqrt{0{,}36 p^6 q^2}$ при $p = 2$ и $q = 5$; 6) $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2}$ при $a = 8\frac{1}{5}$ и $b = \frac{4}{5}$.

2) В амфитеатре 12 рядов. В первом ряду 16 мест, а в каждом следующем на 4 места больше, чем в предыдущем. Сколько мест в шестом ряду амфитеатра?

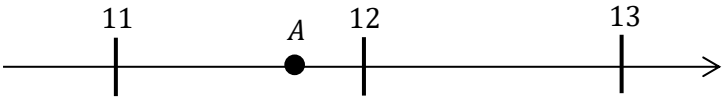
3) При проведении опыта вещество равномерно охлаждали в течение 10 минут. При этом каждую минуту температура вещества уменьшалась на 4° С. Найдите температуру вещества (в градусах Цельсия) через 5 минут после начала проведения опыта, если его начальная температура составляла −3°С.

4) Каждый простейший одноклеточный организм инфузория-туфелька размножается делением на две части. Сколько инфузорий было первоначально, если после шестикратного деления их стало 192?

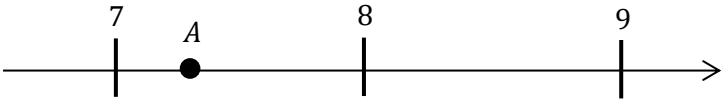
5) Одно из чисел на прямой отмечено точкой А. Какое это число?



1) $\sqrt{27}$ 2) 34 3) $\sqrt{38}$ 4) $\sqrt{47}$



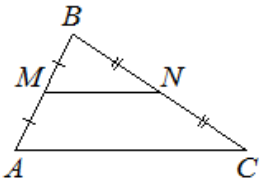
1) $\sqrt{125}$ 2) $\sqrt{140}$ 3) $\sqrt{150}$ 4) $\sqrt{168}$



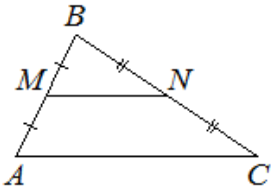
1) $\sqrt{52}$ 2) $\sqrt{61}$ 3) $\sqrt{70}$ 4) $\sqrt{83}$

---

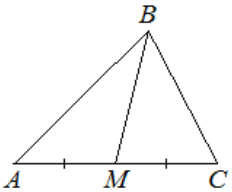
28. Точки M и N являются серединами сторон AB и BC треугольника ABC, сторона AB равна 26, сторона BC равна 39, сторона AC равна 48. Найдите MN.



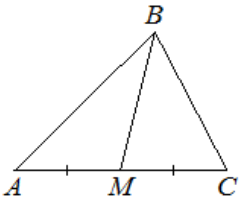
29. Точки M и N являются серединами сторон AB и BC треугольника ABC, сторона AB равна 23, сторона BC равна 25, сторона AC равна 14. Найдите MN.



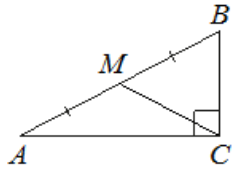
30. В треугольнике ABC известно, что $AC = 20, BM$ — медиана, $BM = 7$. Найдите AM.



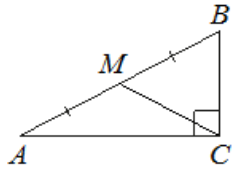
31. В треугольнике ABC известно, что $AC = 34, BM$ — медиана, $BM = 19$. Найдите AM.



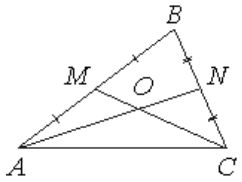
32. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, M — середина стороны AB, $AB = 26$, $BC = 18$. Найдите CM.



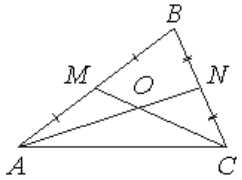
33. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, M — середина стороны AB, $AB = 48$, $BC = 36$. Найдите CM.



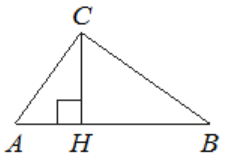
34. Точки M и N являются серединами сторон AB и BC треугольника ABC соответственно. Отрезки AN и CM пересекаются в точке O, $AN = 24$, $CM = 9$. Найдите ON.



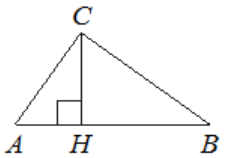
35. Точки M и N являются серединами сторон AB и BC треугольника ABC соответственно. Отрезки AN и CM пересекаются в точке O, $AN = 6$, $CM = 9$. Найдите CO.



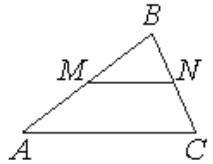
36. На гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC опущена высота CH, $AH = 5$, $BH = 20$. Найдите CH.



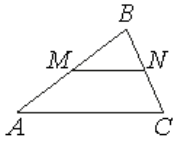
37. На гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC опущена высота CH, $AH = 4$, $BH = 16$. Найдите CH.



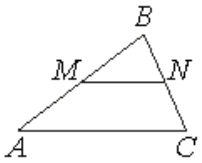
38. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно, $AB = 25$, $AC = 30$, $MN = 12$. Найдите AM.



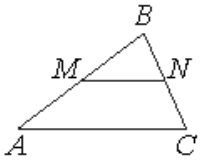
39. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно, $AB = 28$, $AC = 24$, $MN = 18$. Найдите AM.



40. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно, $AC = 21$, $MN = 14$. Площадь треугольника ABC равна 27. Найдите площадь треугольника MBN.



41. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно, $AC = 30$, $MN = 12$. Площадь треугольника ABC равна 25. Найдите площадь треугольника MBN.



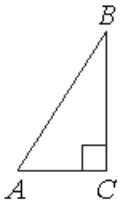
42. Синус острого угла A треугольника ABC равен $\frac{3\sqrt{11}}{10}$. Найдите $cosA$.

43. Синус острого угла A треугольника ABC равен $\frac{3}{5}$. Найдите $cosA$.

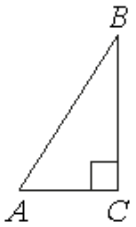
44. Косинус острого угла A треугольника ABC равен $\frac{4}{5}$. Найдите $sinA$.

45. Косинус острого угла A треугольника ABC равен $\frac{3\sqrt{7}}{8}$. Найдите $sinA$.

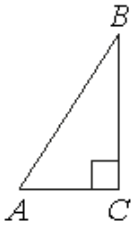
46. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AC = 7$, $AB = 25$. Найдите $sinB$.



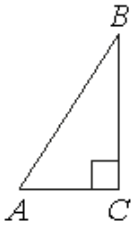
47. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AC = 11$, $AB = 20$. Найдите $sinB$.



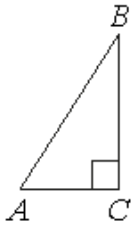
48. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $BC = 14$, $AB = 50$. Найдите $cosB$.



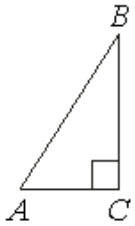
49. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $BC = 16$, $AB = 25$. Найдите $cosB$.



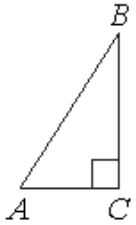
50. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $BC = 10$, $AC = 7$. Найдите tgB.



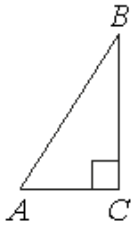
51. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $BC = 3$, $AC = 18$. Найдите tgB.



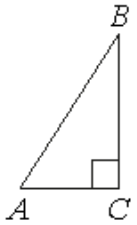
52. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $sinB = \frac{7}{12}$, $AB = 48$. Найдите AC.



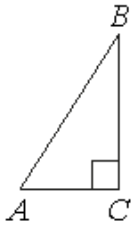
53. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $sinB = \frac{5}{17}$, $AB = 51$. Найдите AC.



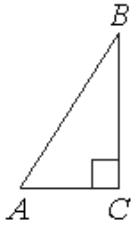
54. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $cosB = \frac{3}{8}$, $AB = 64$. Найдите BC.



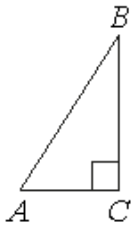
55. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $cosB = \frac{9}{10}$, $AB = 60$. Найдите BC.



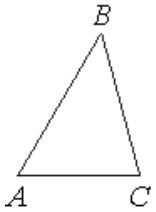
56. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $tgB = \frac{9}{7}$, $BC = 42$. Найдите AC.



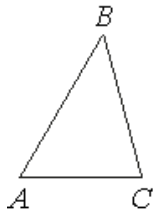
57. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $tgB = \frac{11}{8}$, $BC = 24$. Найдите AC.



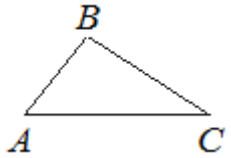
58. В треугольнике ABC угол A равен $30°$, угол B равен $45°$, $BC = 11\sqrt{2}$. Найдите AC.



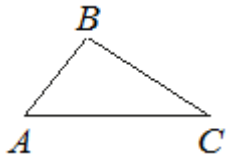
59. В треугольнике ABC угол A равен $60°$, угол B равен $45°$, $BC = 5\sqrt{6}$. Найдите AC.



60. В треугольнике ABC известно, что $AB = 5$, $BC = 6$, $AC = 4$. Найдите $cos\angle ABC$.

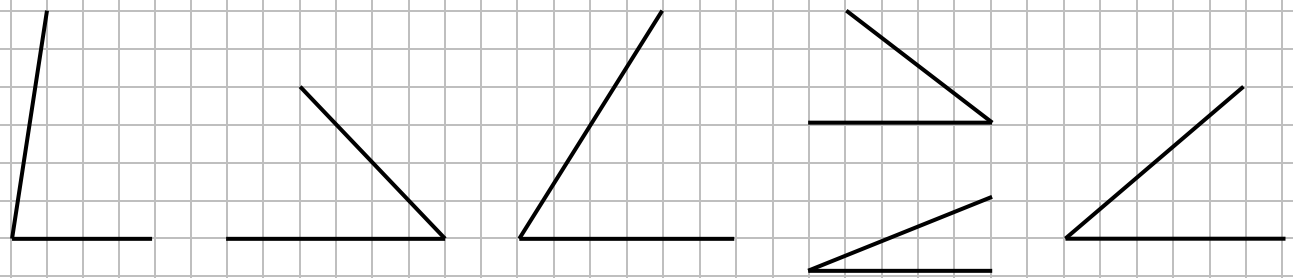


61. В треугольнике ABC известно, что $AB = 2$, $BC = 3$, $AC = 4$. Найдите $cos\angle ABC$.



Повторение.

1) Найдите тангенсы углов, изображённых на рисунках.



2) По всему периметру лоджии, который равен 15 м, вдоль пола планируется установить плинтус, который продается планками по 0,8 метра длиной. Сколько планок плинтуса надо купить?

3) На участке планируют уложить 58 плитки. Плитка продается в упаковках по 8 штук. Сколько упаковок плитки нужно купить?