Тема 10.
Прогрессии.

Арифметическая прогрессия.

Арифметическая прогрессия – это последовательность чисел, в которой числа увеличиваются или уменьшаются на одно и то же число. Например,

-20, -10, 0, 10, 20, 30 и т.д.

В этой последовательности первым членом прогрессии является число $a_1 = -20$, третьим – $a_3 = 0$, шестым – $a_6 = 30$ и т.д. Разность прогрессии d равна 10 – число, на которое увеличивается каждое число последовательности.

Зная первый член прогрессии и ее разность, можно найти любой член прогрессии по формуле

$$a_n = a_1 + d(n-1).$$

Пример. Найдите десятый и тридцать пятый члены арифметической прогрессии -6, -3, … .

Если нет, первого члена, но есть какой-то другой (k-ый), то можно применить формулу

$$a_n = a_k + d(n-k).$$

Пример. Известно, что $a_{12} = 15$ и $a_{13} = 16{,}5$ – члены арифметической прогрессии. Найдите a_{32}.

Также для решения задач может пригодится формула суммы первых n членов прогрессии (для ее использования нужно знать количество членов прогрессии, первый и последний члены):

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Пример. Саша делала приседания, каждый день увеличивая число приседаний на 5. Известно, что в первый день она сделала 15 приседаний. Сколько раз Саша присела за 9 дней?

Не для всех задач на прогрессию нужны формулы. Некоторые задачи можно решить без них (это касается лишь экзаменационных задач, где решение не имеет значения, а важен ответ). С этих задач и начнем.

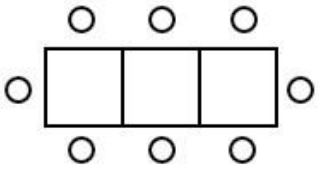
Задачи на арифметическую прогрессию, решаемые без формул.

1. В амфитеатре 10 рядов. В первом ряду 25 мест, а в каждом следующем на 3 места больше, чем в предыдущем.

а) Сколько мест в восьмом ряду амфитеатра?

б) Сколько всего мест в амфитеатре?

2. В кафе есть только квадратные столики, за каждый из которых могут сесть 4 человека. Если сдвинуть два квадратных столика, то получится стол, за который могут сесть 6 человек. На рисунке изображён случай, когда сдвинули 3 квадратных столика вдоль одной линии. В этом случае получился стол, за который могут сесть 8 человек. Сколько человек может сесть за стол, который получится, если сдвинуть 16 квадратных столиков вдоль одной линии?



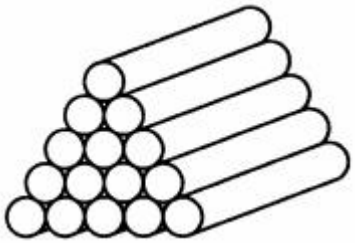
3. При проведении опыта вещество равномерно охлаждали в течение 10 минут. При этом каждую минуту температура вещества уменьшалась на 6° С. Найдите температуру вещества (в градусах Цельсия) через 4 минуты после начала проведения опыта, если его начальная температура составляла −7°С.

4. Врач прописал больному капли по следующей схеме: в первый день 10 капель, а в каждый следующий – на 10 капель больше, чем в предыдущий, до тех пор, пока дневная доза не достигнет 60 капель. Такую дневную дозу (60 капель) больной ежедневно принимает 5 дней, а затем уменьшает прием на 10 капель в день до последнего дня, когда больной принимает последние десять капель. Сколько пузырьков лекарства нужно купить на весь курс, если в каждом пузырьке 5 мл лекарства, то есть 130 капель?

5. Камень бросают в глубокое ущелье. При этом в первую секунду он пролетает 9 метров, а в каждую следующую секунду на 10 метров больше, чем в предыдущую, до тех пор, пока не достигнет дна ущелья. Сколько метров пролетит камень за первые пять секунд?

6. В 7:00 часы сломались и за каждый следующий час отставали на одно и то же количество минут по сравнению с предыдущим часом. В 22:00 того же дня часы отставали на час. На сколько минут отставали часы спустя 17 часов после того, как они сломались?

7. При хранении бревен строевого леса их укладывают так, как показано на рисунке. Сколько бревен находится в одной кладке, если в ее основании положено 12 бревен?

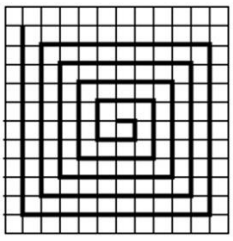


8. В соревновании по стрельбе за каждый промах в серии из 20 выстрелов стрелок получал штрафные очки: за первый промах - два штрафных очка, за каждый последующий промах - на 0,5 очка больше, чем за предыдущий. Сколько раз попал в цель стрелок, получивший 11 штрафных очков?

9. Миша решил заказать себе такси. Подача машины и первые 5 минут поездки в совокупности стоят 159 рублей, а стоимость каждой следующей минуты фиксирована. Стоимость поездки с 6 по 15 минуту (включительно) составила 80 рублей, а с 6 по 25 минуту - 160 рублей. Найдите итоговую стоимость поездки, если поездка длилась 1 час.

Задачи на арифметическую прогрессию, решаемые только по формулам.

10. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 нарисована «змейка», представляющая из себя ломаную, состоящую из чётного числа звеньев, идущих по линиям сетки. На рисунке изображён случай, когда последнее звено имеет длину 10. Найдите длину ломаной, построенной аналогичным образом, последнее звено которой имеет длину 120.



11. К концу 2012 года в городе проживало 62000 человек. Каждый год число жителей города возрастало на одну и ту же величину. В конце 2019 года в городе проживало 69070 человек. Какова была численность населения того же города к концу 2015 года?

12. В течение 25 банковских дней акции компании дорожали ежедневно на одну и ту же сумму. Сколько стоила акция компании в последний день этого периода, если в 7-й день акция стоила 999 рублей, а в 12-й день - 1064 рубля?

13. Саше надо подписать 570 открыток. Ежедневно она подписывает на одно и то же количество открыток больше по сравнению с предыдущим днем. Известно, что за первый день Саша подписала 10 открыток. Определите, сколько открыток было подписано за восьмой день, если вся работа была выполнена за 15 дней.

14. Улитка ползет от одного дерева до другого. Каждый день она проползает на одно и то же расстояние меньше, чем в предыдущий день. Известно, что за первый и последний дни улитка проползла в сумме 9,5 метра. Определите, сколько дней улитка потратила на весь путь, если расстояние между деревьями равно 57 метрам.

15. Известно, что на высоте 2205 м над уровнем моря атмосферное давление составляет 550 мм. рт. ст. Считая, что при подъеме на каждые 10,5 м давление уменьшается примерно на 1 мм. рт. ст., определите атмосферное давление на высоте 2415 м над уровнем моря.

Геометрическая прогрессия.

Геометрическая прогрессия – это последовательность чисел, в которой числа увеличиваются или уменьшаются в одно и то же число раз. Например,

2, 4, 8, 16, 32, 64 и т.д.

В этой последовательности первым членом прогрессии является число $b_1 = 2$, третьим – $b_3 = 8$, шестым – $b_6 = 64$ и т.д. Знаменатель прогрессии q равен 2 – число, на которое умножается каждое число последовательности.

Зная первый член прогрессии и ее знаменатель, можно найти любой член прогрессии по формуле

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

Пример. Найдите седьмой и одиннадцатый члены геометрической прогрессии 2, -6, … .

Также для решения задач может пригодится формула суммы первых n членов прогрессии:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Пример. Вычислите:
а) сумму первых трех членов геометрической прогрессии, если $b_1 = -4, q = 3$;
б) сумму первых шести членов геометрической прогрессии, если $b_1 = 54, q = -2$.

Задачи на геометрическую прогрессию, решаемые без формул.

16. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается вдвое каждые 7 минут. В начальный момент масса изотопа составляла 640 мг. Найдите массу изотопа через 42 минуты. Ответ дайте в миллиграммах.

17. У Тани есть теннисный мячик. Она со всей силы бросила его об асфальт. После первого отскока мячик подлетел на высоту 360 см, а после каждого следующего отскока от асфальта подлетал на высоту в три раза меньше предыдущей. После какого по счёту отскока высота, на которую подлетит мячик, станет меньше 15 см?

18. Каждый простейший одноклеточный организм инфузория-туфелька размножается делением на две части. Сколько инфузорий было первоначально, если после пятикратного деления их стало 480?

Задача на геометрическую прогрессию, решаемая только по формулам.

19. Ваня играет в компьютерную игру. Он начинает с 0 очков, а для перехода на следующий уровень ему нужно набрать не менее 10 000 очков. После первой минуты игры добавляется 2 очка, после второй – 4 очка, после третьей – 8 очков и так далее. Таким образом, после каждой следующей минуты игры количество добавляемых очков удваивается. Через сколько минут Ваня перейдет на следующий уровень?

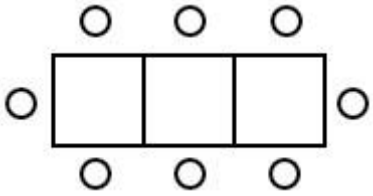
Повторение.

1) $\dfrac{1}{\frac{1}{6}-\frac{1}{7}}$; 2) $\dfrac{1}{\frac{1}{12}-\frac{1}{36}}$; 3) $\dfrac{1}{\frac{1}{18}-\frac{1}{27}}$; 4) $\dfrac{1}{\frac{1}{21}-\frac{1}{9}}$.

Домашнее задание.

1. В амфитеатре 14 рядов. В первом ряду 20 мест, а в каждом следующем на 3 места больше, чем в предыдущем. Сколько мест в десятом ряду амфитеатра? Сколько всего мест в амфитеатре?

2. В кафе есть только квадратные столики, за каждый из которых могут сесть 4 человека. Если сдвинуть два квадратных столика, то получится стол, за который могут сесть 6 человек. На рисунке изображён случай, когда сдвинули 3 квадратных столика вдоль одной линии. В этом случае получился стол, за который могут сесть 8 человек. Сколько человек может сесть за стол, который получится, если сдвинуть 25 квадратных столиков вдоль одной линии?



3. При проведении опыта вещество равномерно охлаждали в течение 15 минут. При этом каждую минуту температура вещества уменьшалась на 5° С. Найдите температуру вещества (в градусах Цельсия) через 7 минут после начала проведения опыта, если его начальная температура составляла 8°С.

4. Врач прописал больному капли по следующей схеме: в первый день 6 капель, а в каждый следующий – на 5 капель больше, чем в предыдущий, до тех пор, пока дневная доза не достигнет 36 капель. Такую дневную дозу (36 капель) больной ежедневно принимает 4 дня, а затем уменьшает прием на 5 капель в день до последнего дня, когда больной принимает последние шесть капель. Сколько пузырьков лекарства нужно купить на весь курс, если в каждом пузырьке 110 капель?

5. При проведении химической реакции в растворе образуется нерастворимый осадок. Наблюдения показали, что каждую минуту образуется 0,5 г осадка. Найдите массу осадка (в граммах) в растворе спустя восемь минут после начала реакции.

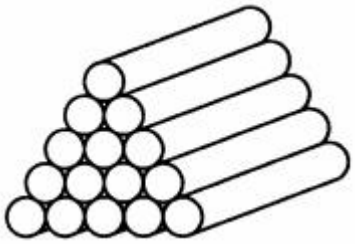
6. Для получения витамина D могут быть рекомендованы солнечные ванны. Загорать лучше утром до 10 часов или вечером после 17 часов. Виктору назначили курс солнечных ванн. Виктор начинает курс с 15 минут в первый день и увеличивает время этой процедуры в каждый следующий день на 6 минут. В какой по счету день продолжительность процедуры достигнет 1 часа 15 минут?

7. Курс воздушных ванн начинают с 10 минут в первый день и увеличивают время этой процедуры в каждый следующий день на 10 минут. В какой по счету день продолжительность процедуры достигнет 1 часа 20 минут?

8. Камень бросают в глубокое ущелье. При этом в первую секунду он пролетает 11 метров, а в каждую следующую секунду на 12 метров больше, чем в предыдущую, до тех пор, пока не достигнет дна ущелья. Сколько метров пролетит камень за первые семь секунд?

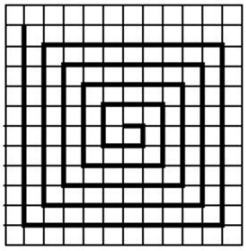
9. В 11:00 часы сломались и за каждый следующий час отставали на одно и то же количество минут по сравнению с предыдущим часом. В 21:00 того же дня часы отставали на 20 минут. На сколько минут отставали часы спустя 24 часа после того, как они сломались?

10. При хранении бревен строевого леса их укладывают так, как показано на рисунке. Сколько бревен находится в одной кладке, если в ее основании положено 15 бревен?



11. Известно, что на высоте 2205 м над уровнем моря атмосферное давление составляет 550 мм. рт. ст. Считая, что при подъеме на каждые 10,5 м давление уменьшается примерно на 1 мм. рт. ст., определите атмосферное давление на высоте 1890 м над уровнем моря.

12. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 нарисована «змейка», представляющая из себя ломаную, состоящую из чётного числа звеньев, идущих по линиям сетки. На рисунке изображён случай, когда последнее звено имеет длину 10. Найдите длину ломаной, построенной аналогичным образом, последнее звено которой имеет длину 90.



13. К концу 2007 года в городе проживало 42900 человек. Каждый год число жителей города возрастало на одну и ту же величину. В конце 2018 года в городе проживало 51810 человек. Какова была численность населения того же города к концу 2015 года?

14. В течение 20 банковских дней акции компании дорожали ежедневно на одну и ту же сумму. Сколько стоила акция компании в последний день этого периода, если в 9-й день акция стоила 444 рублей, а в 13-й день - 516 рублей?

15. Лера решила заказать себе такси. Подача машины и первые 2 минут поездки в совокупности стоят 99 рублей, а стоимость каждой следующей минуты фиксирована. Стоимость поездки с 3 по 22 минуту (включительно) составила 120 рублей, а с 3 по 32 минуту - 180 рублей. Найдите итоговую стоимость поездки, если поездка длилась 52 минуты.

16. Грузовик перевозит партию щебня массой 270 тонн, ежедневно увеличивая норму перевозки на одно и то же число тонн. Известно, что за первый день было перевезено 6 тонны щебня. Определите, сколько тонн щебня было перевезено на шестой день, если вся работа была выполнена за 12 дней.

17. Лене надо подписать 972 открытки. Ежедневно она подписывает на одно и то же количество открыток больше по сравнению с предыдущим днем. Известно, что за первый день Лена подписала 20 открыток. Определите, сколько открыток было подписано за седьмой день, если вся работа была выполнена за 18 дней.

18. В соревновании по стрельбе за каждый промах в серии из 30 выстрелов стрелок получал штрафные очки: за первый промах - одно штрафное очко, за каждый последующий промах - на 0,5 очка больше, чем за предыдущий. Сколько раз попал в цель стрелок, получивший 13,5 штрафных очка?

19. В ходе бета-распада радиоактивного изотопа А каждые 8 минут половина его атомов без потери массы преобразуются в атомы стабильного изотопа Б. В начальный момент масса изотопа А составляла 160 мг. Найдите массу образовавшегося изотопа Б через 40 минут. Ответ дайте в миллиграммах.

20. Митя играет в компьютерную игру. Он начинает с 0 очков, а для перехода на следующий уровень ему нужно набрать не менее 30 000 очков. После первой минуты игры добавляется 2 очка, после второй – 4 очка, после третьей – 8 очков и так далее. Таким образом, после каждой следующей минуты игры количество добавляемых очков удваивается. Через сколько минут Митя перейдет на следующий уровень?

21. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается вдвое каждые 7 минут. В начальный момент масса изотопа составляла 240 мг. Найдите массу изотопа через 28 минут. Ответ дайте в миллиграммах.

22. В ходе биологического эксперимента в чашку Петри с питательной средой поместили колонию микроорганизмов массой 13 мг. За каждые 30 минут масса колонии увеличивается в 3 раза. Найдите массу колонии микроорганизмов через 90 минут после начала эксперимента. Ответ дайте в миллиграммах.

23. Каждый простейший одноклеточный организм инфузория-туфелька размножается делением на две части. Сколько инфузорий было первоначально, если после шестикратного деления их стало 320?

24. Решите уравнения:

1) $16x + 15 = 14x - 63$; 2) $2x^2 - 5x - 3 = 0$; 3) $\frac{x^2 - 1}{2} - 11x = 11$.

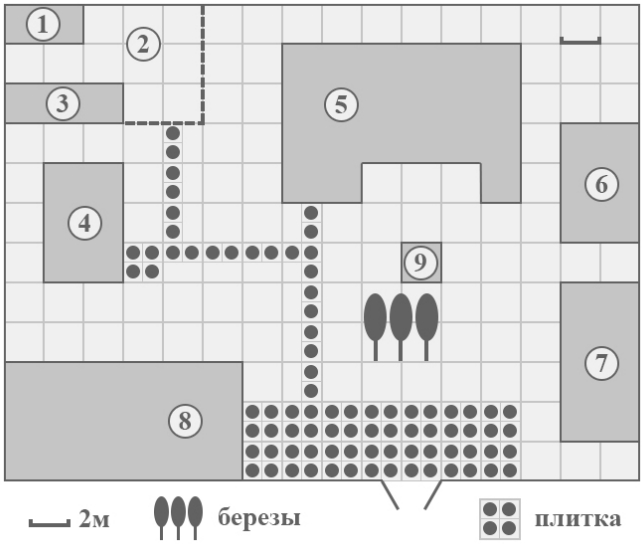
25. Решите неравенства:

1) $(x + 6)(x - 3) > 0$; 2) $x^2 + 2x - 48 < 0$; 3) $-13x + 6 \geq -15x + 4$.

26. На плане изображено домохозяйство, находящееся по адресу: д. Судимля, д. 12. Сторона каждой клетки на плане равна 2 м. Участок имеет форму прямоугольника. Выезд и въезд осуществляются через единственные ворота.

При входе на участок справа от ворот находится коровник, а слева - курятник. Рядом с курятником расположен пруд площадью 24 кв.м. Жилой дом расположен в глубине территории. Перед домом имеется фонтан, а между фонтаном и воротами - небольшая березовая рощица. Между жилым домом и коровником построена баня. За домом находится огород (его границы отмечены на плане пунктирной линией), на котором есть теплица, а также (в самом углу и огорода, и всего домохозяйства) - компостная яма.

Все дорожки внутри участка имеют ширину 1 м и вымощены тротуарной плиткой размером 1 м х 1 м. Между коровником и курятником имеется площадка площадью 56 кв.м, вымощенная такой же плиткой. К домохозяйству проведено электричество. Имеется магистральное газоснабжение и водопровод.



а) Сопоставьте объекты, указанные в таблице, с цифрами, которыми эти объекты обозначены на плане. Заполните таблицу, а в бланк ответов перенесите последовательность из пяти цифр.

Объекты	Жилой дом	Коровник	Теплица	Баня
Цифры				

б) Тротуарная плитка продается в коробках по 11 штук. Сколько коробок понадобилось купить владельцам домохозяйства для того, чтобы выложить все дорожки и площадку между коровником и курятником?

в) Найдите площадь, которую занимает жилой дом. Ответ дайте в квадратных метрах.