Геометрическая задача на доказательство.

Треугольник.

1. В треугольнике ABC с тупым углом ACB проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что треугольники A_1CB_1 и ACB подобны.

2. В треугольнике ABC с тупым углом ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Докажите, что треугольники A_1BC_1 и ABC подобны.

3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что углы BB_1A_1 и BAA_1 равны.

4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. Докажите, что углы BB_1C_1 и BCC_1 равны.

Трапеция.

1. В трапеции ABCD с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке O. Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны.

2. В трапеции ABCD с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке P. Докажите, что площади треугольников APB и CPD равны.

3. Основания BC и AD трапеции ABCD равны соответственно 4,5 и 18, BD=9. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

4. Основания BC и AD трапеции ABCD равны соответственно 5 и 45, BD=15. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

5. На средней линии трапеции ABCD с основаниями AD и BC выбрали произвольную точку E. Докажите, что сумма площадей треугольников BEC и AED равна половине площади трапеции.

6. На средней линии трапеции ABCD с основаниями AD и BC выбрали произвольную точку K. Докажите, что сумма площадей треугольников BKC и AKD равна половине площади трапеции.

7. Точка E — середина боковой стороны AB трапеции ABCD. Докажите, что площадь треугольника ECD равна половине площади трапеции.

8. Точка K — середина боковой стороны CD трапеции ABCD. Докажите, что площадь треугольника KAB равна половине площади трапеции.

9. Биссектрисы углов B и C трапеции ABCD пересекаются в точке O, лежащей на стороне AD. Докажите, что точка O равноудалена от прямых AB, BC и CD.

10. Биссектрисы углов A и D трапеции ABCD пересекаются в точке M, лежащей на стороне BC. Докажите, что точка M равноудалена от прямых AB, AD и CD.

Параллелограмм.

1. Внутри параллелограмма ABCD выбрали произвольную точку E. Докажите, что сумма площадей треугольников BEC и AED равна половине площади параллелограмма.

2. Внутри параллелограмма ABCD выбрали произвольную точку F. Докажите, что сумма площадей треугольников BFC и AFD равна половине площади параллелограмма.

3. Биссектрисы углов C и D параллелограмма ABCD пересекаются в точке L, лежащей на стороне AB. Докажите, что L — середина AB.

4. Биссектрисы углов B и C параллелограмма ABCD пересекаются в точке M, лежащей на стороне AD. Докажите, что M — середина AD.

5. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма ABCD проведена прямая, пересекающая стороны AB и CD в точках P и Q соответственно. Докажите, что отрезки BP и DQ равны.

6. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма ABCD проведена прямая, пересекающая стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Докажите, что отрезки AE и CF равны.

7. Сторона AD параллелограмма ABCD вдвое больше стороны AB. Точка M — середина стороны AD. Докажите, что BM — биссектриса угла ABC.

8. Сторона AD параллелограмма ABCD вдвое больше стороны AB. Точка M — середина стороны AD. Докажите, что BM — биссектриса угла ABC.

Четырехугольник.

1. Известно, что около четырёхугольника ABCD можно описать окружность и что продолжения сторон AB и CD четырёхугольника пересекаются в точке M. Докажите, что треугольники MBC и MDA подобны.

2. Известно, что около четырёхугольника ABCD можно описать окружность и что продолжения сторон AD и BC четырёхугольника пересекаются в точке K. Докажите, что треугольники KAB и KCD подобны.

3. В выпуклом четырёхугольнике ABCD углы BCA и BDA равны. Докажите, что углы ABD и ACD также равны.

4. В выпуклом четырёхугольнике ABCD углы DAC и DBC равны. Докажите, что углы CDB и CAB также равны.

Окружность.

1. Окружности с центрами в точках I и J пересекаются в точках A и B, причём точки I и J лежат по одну сторону от прямой AB. Докажите, что прямые AB и IJ перпендикулярны.

2. Окружности с центрами в точках E и F пересекаются в точках C и D, причём точки E и F лежат по одну сторону от прямой CD. Докажите, что прямые CD и EF перпендикулярны.

3. Окружности с центрами в точках I и J не имеют общих точек, и ни одна из них не лежит внутри другой. Внутренняя общая касательная к этим окружностям делит отрезок, соединяющий их центры, в отношении m:n. Докажите, что диаметры этих окружностей относятся как m:n.

4. Окружности с центрами в точках P и Q не имеют общих точек, и ни одна из них не лежит внутри другой. Внутренняя общая касательная к этим окружностям делит отрезок, соединяющий их центры, в отношении a:b. Докажите, что диаметры этих окружностей относятся как a:b.